Sokratische Gespräche über mathematische Themen mit Erwachsenen - Absichten und Erfahrungen

von Hartmut Spiegel

Von Stella Baruk stammt die Bezeichnung „Automath". Damit ist der Geisteszustand gemeint, in den allzuviele Schüler durch Mathematikunterricht versetzt werden. Eine Möglichkeit, die vom „Automathen" in einen Menschen mit Vertrauen in die Kraft des eigenen Denkens auch im Bereich der Mathematik zu verwandeln, bietet die sokratische Methode Leonard Nelsons. Erfahrungen mit heutiger Praxis dieser Methode stehen im Mittelpunkt dieses Ansatzes.

Einleitung

Daß man
- für mathematische Sachverhalte und Zusammenhänge ein tiefgehendes Verständnis erwerben kann,
- sich durch eigenes Nachdenken und gemeinsames Erwägen von Argumenten im Gespräch mit anderen so von ihrer Wahrheit überzeugen kann, daß es der Bestätigung durch eine Autorität wie Lehrer oder Buch nicht mehr bedarf,
- auch selbst mathematische Entdeckungen machen kann
- und durch alles dieses Spaß an der Mathematik und Selbstvertrauen in die Kraft des eigenen Denkens gewinnen kann, das alles sind (allgemeinbildende) Erfahrungen, die viel zu vielen Erwachsenen während ihrer Schulzeit vorenthalten geblieben sind. Ihr Bild von der Mathematik, ihre Beziehung zur Mathematik und ihre Selbsteinschätzung der eigenen mathematischen Fähigkeiten fallen dementsprechend aus – und wenn es erst so weit gekommen ist, scheint es auch wenig Chancen zu geben, daran etwas zu ändern.

Daß es dazu doch eine Möglichkeit gibt, zeigen meine Erfahrungen in einer Vielzahl sokratischer Gespräche über mathematische Themen mit Erwachsenen: Voraussetzung war in diesen Fällen „nur" die Bereitschaft der Betroffenen, eine Woche lang jeden Vormittag zweieinhalb Stunden als Teilnehmer einer Gruppe in einem nach bestimmten Regeln geführten Gespräch an einem mathematischen Thema zu arbeiten[1], z.B. über:
- Körper, die von gleichen Flächen mit lauter gleichen Seiten und Winkeln begrenzt werden
- Ist ein Rundgang möglich, bei dem man über jede der sieben Brücken Königsberg genau einmal geht?
- Ist jede Primzahl Nachbar eines Vielfachen von 6?
- Führt die Methode der „abessinischen Multiplikation" (auch bekannt als „russische Bauernmethode") immer zu einem richtigen Ergebnis?
- Ist es immer möglich, den Radius eines Kreises genau sechsmal auf seiner Peripherie abzutragen?

Ein zutreffendes Bild von dem, was bei einem solchen Gespräch im einzelnen tatsächlich abläuft, läßt sich meiner Erfahrung nach nur durch eine Teilnahme gewinnen. Und dies wäre dann auch die beste Möglichkeit, sich von den vielfältigen positiven Wirkungen dieser Arbeit zu überzeugen. Der nachfolgende Text kann und soll dem Leser nur ein erstes Kennenlernen ermöglichen, ihn über die zugrundeliegenden Ideen informieren und von der Fruchtbarkeit dieser Arbeit überzeugen.

Was sind sokratische Gespräche?

Wer „sokratisches Gespräch" hört, verbindet damit häufig die in den Dialogen des Sokrates verwendete Methode, wie sie aus den Überlieferungen von Platon bekannt ist. Hier ist von einer unterschiedlichen Methode die Rede: Sie stammt von dem Göttinger Philosophen Leonard Nelson (1882-1927) und wurde von seinem Schüler Gustav Heckmann weiterentwickelt. Nelson, der sie selbst im philosophischen Unterricht von Studenten verwendete, stellte sie 1922 in einem Vortrag in der Pädagogischen Gesellschaft in Göttingen vor. [5] Für eine erste Charakterisierung sei Gustav Heckmann zitiert:

„Sokratische Methode im weitesten Sinne wird praktiziert, wo und wann immer Menschen durch gemeinsames Erwägen von Gründen der Wahrheit in einer Frage näherzukommen suchen. Dieses Bestreben tritt vielfach hier und da in Gesprächen auf. Sokratisch würde ich ein Gespräch nennen, in dem durchgängig ein gemeinsames Erwägen von Gründen stattfindet." ([3]S.7)

Bei diesem gemeinsamen Erwägen von Gründen beachten die Teilnehmer folgende Regeln:
- Sprich klar und kurz und versuche Dich allen Teilnehmern verständlich zu machen!
- Halte an der gerade erörterten Frage fest und schweife nicht ab!
- Nimm jede Äußerung jedes anderen Teilnehmers in gleicher Weise ernst!
- Prüfe Änderungen anderer Teilnehmer daraufhin, ob Du sie vollständig aufgefaßt und verstanden hast und sie auf den Gang der Argumentation beziehen kannst!
- Sprich vorhandene Fragen und Zweifel aus, aber spiele nicht den „advocatus diaboli!
- Arbeite auf einen Konsens hin!

Wichtig ist die absolute Gleichberechtigung der Teilnehmer und die Gemeinsamkeit der Arbeit.

Die Hauptaufgaben des Gesprächsleiters bestehen darin, für das Gelingen der Verständigung zu sorgen und das Gespräch in fruchtbare Bahnen zu lenken. Hierzu formuliert Heckmann in seinem Buch „Sechs pädagogische Maßnahmen“ [2] S. 66 ff.), denen ich charakterisierende Zitate aus den Erläuterungen beifüge:

1. Gebot der Zurückhaltung
„Zu allererst muß er die Teilnehmer auf ihr eigenes Urteilsvermögen verweisen, indem er seine eigene Meinung über die erörterte Sache nicht zu erkennen gibt.“

2. Im Konkreten Fuß fassen
„Er wird etwa die Teilnehmer auffordern, einen in allgemeiner Formulierung geäußerten Gedanken durch ein Beispiel zu erläutern.“

3. Das Gespräch als Hilfsmittel des Denkens voll ausschöpfen
„Darauf achten, ob die Teilnehmer wirklich verstehen, und wo das zweifelhaft ist, eine genaue Verständigung herbeizuführen versuchen.“

4. Festhalten der gerade erörterten Frage

5. Hinstreben auf Konsensus

6. Lenkung
...“ den Weg zu beobachten, den das Gespräch nimmt. und darüber zu wachen, daß wesentliche Fragen angegriffen und fruchtbare Ansätze aufgegriffen werden.“

Welche Themen kommen für sokratische Gespräche in Frage?

Da allein mit dem „Instrument des Reflektierens über Erfahrungen, die allen Gesprächsteilnehmern zur Verfügung stehen“ ([3]S.8) gearbeitet wird, eignen sich insbesondere Themen aus Mathematik und Philosophie. Die Philosophie steht auch im Mittelpunkt von Nelsons Rede. In ihr legt er dar, warum und wie er die sokratische Methode für den philosophischen Unterricht einsetzt. Er schließt aber mit Bemerkungen über den Wert sokratischen Methode für den mathematischen Unterricht und vertraut ausdrücklich „seinen Schützling der Obhut der Mathematik“ an. Einige Grundgedanken seiner Rede werden im folgenden wiedergegeben.

Grundgedanken Leonard Nelsons über die sokratische Methode [2)]

Warum ist für Nelson die sokratische Methode für den philosophischen Unterricht notwendig? Er äußert sich dazu wie folgt: „Wir haben gefunden, daß die Philosophie der Inbegriff jener allgemeinen Vernunftwahrheiten ist, die nur durch Denken klar werden. Philosophieren ist demnach nichts anderes, als mit Hilfe des Verstandes jene abstrakten Vernunftweisheiten zu isolieren und in allgemeinen Urteilen auszusprechen.

Was folgt daraus für den philosophischen Unterricht?

Jene allgemeinen Wahrheiten lassen sich, sofern sie in Worten ausgesprochen werden, zu Gehör bringen. Aber sie werden darum keineswegs eingesehen. Einsehen kann sie *nur* derjenige, der von ihrer Anwendung ausgeht in Urteilen, die *er selbst* fällt, und der dann, indem er *selbst* den Rückgang zu den Voraussetzungen dieser Erfahrungsurteile vollzieht, in ihnen *seine eigenen Voraussetzungen wiedererkennt.“* (S. 14, Hervorhebungen von mir)

Nelson schließt zwar nicht aus, daß auch von einem Vortrag Anregung zum Selbstdenken, „zumal bei reiferen Schülern“, ausgehen kann. „Aber zu welcher Anlockung auch solche Anregung sich steigern mag, *unwiderstehlich* ist sie nicht.“ (S. 17)

An späterer Stelle geht Nelson nochmals auf diesen Punkt ein: „Es nützt nun einmal nichts, eine richtige, klar und wohlbegründete Lehre vor dem Schüler auszubreiten, - es nützt nichts, selbst wenn der Einladung zum Mitdenken vom Schüler Folge geleistet wird, - ja es nützt sogar nichts, die Schüler auf die Schwierigkeiten hinzuweisen, die der überwinden muß, der selbständig solche Ergebnisse finden will. Dem Schüler, der zur selbständigen Beherrschung des philosophischen Lehrgehalts vordringen soll, kann es nicht erspart bleiben, aus der bloßen Kenntnisnahme der Probleme und ihrer Schwierigkeiten herauszutreten und in unablässiger Übung mit ihnen zu ringen, um sie, durch den täglichen Umgang mit ihnen, mit all ihren Tücken und Fallstricken und ihren mannigfachen Gestalten meistern zu lernen. Der Vortrag des Lehrers, der *wie Fries* verlangt, in einer „nach feinen Abstraktionen gebildeten Sprache“ erfolgen soll, verhüllt aber, gerade vermöge seiner Sicherheit und Reinheit, die Schwierigkeiten, die der Bildung solcher Geistesklarheit und Wortschärfe im Wege stehen. ...“ (S. 33/34)

Am Ende seines Vortrages legt Nelson dar, weshalb seine Überlegungen im Kern auch auf den Mathematikunterricht zutreffen. Er stellt fest, daß der Erfolg des Unterricht in Mathematik, bei der „vom ersten bis zum letzten Schritt ... alles restlos und lückenlos klar ist“, „im großen betrachtet – ein negativer ist.“ (S. 35). Als Grund für den negativen Erfolg des Mathematikunterrichts gibt er an, daß „auch der beste mathematische Unterricht, wenn er nach dogmatischer Methode erfolgt, trotz aller Klarheit gründliches Verständnis nicht erzwingen kann“. (S. 35) Seines Erachtens liegt dies am Mißverhältnis zwischen der objektiven Klarheit und systematischen Vollkommenheit einer wissenschaftlichen Lehre einerseits und der pädagogischen Gewähr für das Verständnis andererseits“. (S. 36)

Wirkungen alltäglichen Mathematikunterrichts

Was Nelson im Jahre 1922 sagte, kann über den heutigen Mathematikunterricht mit gleichem Recht gesagt werden: „Wir wollen hier nichts beschönigen und niemanden anklagen. Aber da wir Lehrer heute unter uns sind, wollen wir das öffentliche Geheimnis ruhig aussprechen: Der Erfolg ist – im großen betrachtet – ein negativer. Wir wissen alle, daß selbst fähige und Anstrengungen nicht scheuende Schüler und Hochschüler, wenn man sie auf Herz und Nieren prüft, schon in den elementaren mathematischen Angelegenheiten unsicher sind und ihr Nicht-Wissen entdecken.“ ([5]S. 35). Er spricht hier aus, daß der Mathematikunterricht das nicht einlöst, was Wagenschein das „Menschenrecht auf Verstehen“ nennt, ein allgemein akzeptiertes hochrangiges Ziel des Mathematikunterrichts an allgemeinbildenden Schulen, der sich nicht auf das Vermitteln instrumenteller Fertigkeiten (z.B. Bruchrechnen, Gleichungslösen, Kurvendiskussion, Extremwertaufgaben) beschränken darf.[3)]

In Verbindung mit dem Nichteinlösen dieses Menschenrechts verspielt Mathematikunterricht weitere bedeutende, für ihn spezifische, aber allgemeinbildende Chancen: Selbstzeugnisse Erwachsener belegen folgendes (vgl. z.B. die entsprechenden Zitate im nächsten Abschnitt):

Das Bild der Mathematik ist sehr häufig einseitig und verzerrt, auch bei denen, die mit Mathematik in der Schule keine großen Schwierigkeiten hatten: Mathematik ist eine große, in weiten Teilen undurchschaubare und unverstehbare Formelsammlung, ein Fertigprodukt, ein Wissensbestand in Form von Begriffen, Sätzen und Verfahren, den es – notfalls auch „besinnungslos" – zu lernen gilt, um ihn anwenden zu können. Mathematik und Kreativität haben nichts miteinander zu tun. Der Sinn von Beweisen ist unklar und wenn man Beweise macht, muß man ständig Schritte tun, die man nicht versteht und von denen man nicht weiß, warum man sie tut. Dementsprechend ist die Beziehung zur Mathematik geprägt von Desinteresse, Ablehnung oder gar Angst und Haß.

Das Selbstbild ist häufig negativ, es reicht von dem Gefühl, „hoffnungslos dumm" zu sein, bis zu der milderen Variante, die sich als „mangelndes Vertrauen in die Kraft des eigenen Denkens umschreiben läßt" – und das, obwohl die Mathematik wie kein anderes Schulfach in besonderer Weise geeignet ist, das Selbstvertrauen in die Kraft des eigenen Denkens zu stärken.

Im folgenden Abschnitt wird dokumentiert und beschrieben, welche heilsamen Wirkungen sokratische Gespräche über Mathematik auf Erwachsene hatten, deren Verhältnis zur Mathematik teilweise oder vollständig obiger Beschreibung entsprach. Dadurch wird auch belegt, daß sokratische Gespräche geeignet sind, Ziele wirklich zu erreichen, die allgemeinbildender Mathematikunterricht immer schon hat.

Die naheliegende Empfehlung, eine durchgängige und konsequente Anwendung der sokratischen Methode als Therapie für den Patienten „Mathematikunterricht" vorzuschlagen, verbietet sich allerdings, da die Randbedingungen alltäglichen Mathematikunterrichts in öffentlichen Schulen aller Arten und Schulstufen – wie z.B. Lehrpläne, Unterrichtsorganisation und Gruppengröße – eine solche Anwendung unmöglich machen.[4] Es wäre aber schon viel gewonnen, wenn mehr Mathematikunterricht zumindest im Geist der sokratischen Methode realisiert würde und unter passenden Bedingungen zusätzlich gewisse Unterrichtsabschnitte als sokratische Gespräche durchgeführt würden (vgl. [1]).

Erfahrungen aus sokratischen Gesprächen über mathematische Themen im Rahmen von Seminaren mit Erwachsenen

Im Rahmen von Wochenseminaren, die von der Philosophisch-Politischen Akademie[5)] veranstaltet werden, leite ich seit 1979 regelmäßig mathematische Gruppen.[6)] Teilnehmer sind Frauen und Männer unterschiedlichen Alters – zwischen 19 und 80 Jahre alt – und unterschiedlicher Berufsgruppen – von Hausfrauen bis zu Grund- oder Hauptschullehrern, die als ehemalige Studenten von Gustav Heckmann das sokratische Gespräch schon während ihrer Ausbildung an der Pädagogischen Hochschule in Hannover kennengelernt haben. Es wird 6 Tage lang vormittags jeweils 3 Stunden (einschließlich einer Pause von einer halben Stunde) an einem von mir vorgegebenen Thema gearbeitet. Die Teilnehmer entscheiden sich am ersten Abend, in welcher Gruppe sie mitarbeiten. Schon hier zeigt sich häufig, welche starken Bedenken vorhanden sind, das mathematische Thema zu wählen, Bedenken, die nach eigenen Aussagen der Betroffenen aus ihren Erfahrungen mit Mathematik in der Schule und dem daraus entstandenen Verhältnis zur Mathematik resultieren.[7)] Diesen Bedenken am Anfang stehen ausnahmslos positive Kommentare am Ende der Woche gegenüber.

Über solche Kommentare möchte ich nun berichten. Als erstes indirekt, indem ich die Antwort wiedergebe, die ich Gustav Heckmann im Frühjahr 1980 auf einer Anfrage zur Arbeit in den Gruppen schrieb. Ich hatte mit einer Gruppe über „Körper, die von sechs Flächen begrenzt sind" gearbeitet.

„Das Wesentliche im Geschehen der mathematische Gruppe aus meiner Sicht skizziere ich wie folgt, wobei ich mich auf Äußerungen der Teilnehmer stütze: Die Teilnehmer – von denen sich einige als „mathematikgeschädigt" durch die Schule bezeichnen – haben die für sie völlig neue Erfahrung gemacht, daß sie selbst in der Lage waren, durch intensives Nachdenken und das argumentierende Gespräch über die anstehende Frage mathematische Einsichten zu gewinnen. Dabei erreichten sie ein Maß an Verstehen, das sie von der Schule her nicht kannten. Das gilt auch für das während der Arbeit ständig steigende Interesse und den Spaß daran. Es resultierte für alle Teilnehmer ein neues, verändertes Bild von Mathematik:
- Sie ist etwas, das man verstehen und selbst erarbeiten (und nicht nur von anderen annehmen) kann;
- auch praktisches Probieren und Zeichnen kann zur Erkenntnisgewinnung beitragen;
- auch für etwas, was man schon gut zu wissen glaubt, können sich durch die sokratische Arbeit neue Aspekte und vertiefte Einsichten ergeben."

Im darauffolgenden Jahr arbeitete ich mit einer Gruppe von vier Personen über das Königsberger Brückenproblem. Anschließend bat ich um schriftliche Beantwortung von drei Fragen.
Hier die Fragen und einige Antworten:

Frage 1: Wie ist die Einstellung, das Verhältnis zu, die Ansicht über Mathematik beeinflußt / verändert worden?

Anna: „Bisher glaubte ich, Mathematik besteht aus umfangreichen und komplizierten Zahlen- und Rechenvorgängen. In unserem kleinen Arbeitskreis habe ich gelernt und erkannt, daß Mathematik sehr viel mehr mit folgerichtigem Denken zu tun hat. Auch wurde mir klar, daß es in der Mathematik um die sorgfältige Klärung begrifflichen Denkens geht. Ich habe mir überhaupt nicht vorstellen können, daß in einer Arbeitsgemeinschaft über Mathematik Gespräch stattfinden können, wie wir sie gehabt haben."

Else: "Meine Einstellung zur Mathematikd. h. meine Vorstellung, wie *ich* mathematische Aufgaben lösen kann, ist durch unsere sokratische Arbeit wesentlich verändert worden: Ich meinte vorher, ich bin absolut unbegabt für Mathematik. Nach unserer Arbeit habe ich erkannt, daß durch das gemeinsamme Suchen nach Schritten zur Lösungsfindung nach der sokratischen Methode selbst ich (!) etwas zu einer Lösung beitragen kann.“

Frage 2: Was ist durch unsere sokratische Arbeit bewirkt worden, was nicht hätte bewirkt werden können durch eine 15-minütige Erklärung der Zusammenhänge?

Anna: „Ich hätte durch eine kurze Erklärung nicht erkennen können, wie mühselig die Begründung einer Antwort auf eine mathematische Fragestellung erarbeitet werden muß.“

Else: „Durch diesen Prozeß habe ich den Weg zur Lösung und die Lösung selbst so aufgenommen, daß ich eine richtige Freude und „Befriedigung“ über diese gemeinsame Arbeit empfunden habe. Durch eine kurze *Erklärung* der Lösungswege hätte ich höchstens nur mit dem Kopf nicken können.“

Iris: „Eine Erklärung läßt uns mehr oder weniger passiv versuchen, fremde Gedankengänge nachzuvollziehen. Auch die Schrittgröße kann nicht selbst bestimmt werden. Beides kann ein Verständnis der Zusammenhänge verhindern, da jeder Mensch wahrscheinlich seine eigene Art zu denken hat. Ein negatives Vorurteil, z.B. gegen die Mathematik und Verunsicherung im eigenen Denken können die Folge sein.“

Frage 3: Wie ist das immer vorhandene Maß an Spannung zu erklären trotz einer gewissen Zähigkeit im Fortgang der Arbeit?

(Die folgende Antwort zitiere ich deswegen so ausführlich, weil sie eine gute Vorstellung von einem wesentlichen Merkmal der Methode vermittelt.)

Anna: „Mich hat am stärksten beeindruckt die Art und Weise des Gesprächsverlaufes oder anders gesagt, wie wir durch die Systematik Deiner Leitung zu Arbeitsergebnissen gekommen sind. Um es noch einmal am Beispiel wiederzugeben: E1 äußert eine Meinung. Unklar ist, ob jeder Teilnehmer E1 richtig verstanden hat. Hartmut (H) bittet E2 zu sagen, wie sie E1 verstanden hat. E2 versucht zu formulieren, was E1 ausdrücken wollte. D hat Zweifel, ob E2 die Aussage von E1 richtig wiedergegeben hat. Nun faßt D zusammen, was E1 sagte und wie E2 es verstanden hat, und gibt seine Deutung, wie beide zu verstehen sind. E1 ist mit dieser Zusammenfassung nicht zufrieden, weil sie etwas anderes sagen wollte, als D in seiner Zusammenfassung ausdrückte. H bittet E1, ihren Satz zu wiederholen. Nun ist E1 nicht mehr in der Lage, ihren Gedankengang noch einmal so zu präzisieren, wie sie ihn zu Beginn des Gespräches formulierte. H. wiederholt nun die in den einzelnen Beiträgen enthaltenen Kernüberlegungen und hilft uns dadurch, einen Satz zu formulieren, den wir schriftlich festhalten können, weil dieser Satz uns zu einer weiterführenden Einsicht verhilft. Diese Form des Gespräches hat mich am meisten beeindruckt und war auch die Ursache für die dauernde Spannung, die das Gespräch begleitete. Es faszinierte mich geradezu, daß an jedem Morgen die Arbeit wieder mit einer so großen Spannung begann. Weil wir nur vier Teilnehmer waren, konnte ich das Mitdenken jedes einzelnen spüren. Das schrittweise Vorgehen, an dem alle teilhatten, führte dann jeweils zu Teilergebnissen, mit denen alle Gesprächsteilnehmer übereinstimmten. Diese durch die Gesprächsmethode herbeigeführte Übereinstimmung beeindruckte mich am meisten.“

Zum Schluß noch eine kurze, etwas anders nuancierte, aber in die gleiche Richtung zielende Äußerung aus einem Brief einer Teilnehmerin meines ersten Gespräches im Frühjahr 1979 über reguläre Polyeder:

„Das Außergewöhnliche am sokratischen Gespräch selber war für uns die intensive und teilweise auch mühsame Beschäftigung mit einer Frage; diese Beschäftigung, zu der man sich selten so viel Zeit nimmt. Uns ist dabei bewußt geworden, daß man die Bereitschaft zum Bemühen um ein Urteil und zur Geduld auch versuchen sollte, ins tägliche Leben zu übernehmen.“

Das Bemerkenswerte an dieser Äußerung ist für mich, daß sie Folge einer eine Woche lang dauernden Beschäftigung mit einer *mathematischen* Frage ist, ein Beschäftigung, von der keiner sich vorher vorstellen kann, daß sie irgendwelche Auswirkungen auf andere Bereiche des täglichen Lebens hat.

Ein Beispiel

Ein Bericht, der einen zutreffenden und vollständigen Eindruck davon vermitteln wollte, wie die Arbeit einer sokratischen Gruppe zu einem mathematischen Thema in einem konkreten Fall aussah, würde den hier vorgegebenen Rahmen sprengen. In welchem Stil gearbeitet wird, wurde bisher an zwei Stellen deutlich: bei der Aufzählung der Regeln (1) und in den Äußerungen von Teilnehmerinnen (4). Daher steht im Mittelpunkt der nachstehend wiedergegebenen Verlaufsskizze eines sokratischen Gespräches zum Thema: „Die Milchmädchenrechnung“ die Wiedergabe des zeitlichen Ablaufs sowie des Inhalts wesentlicher Arbeitsschritte. Dieses Gespräch (mit 7 Teilnehmern) fand vom 3. bis 8.10.1988 in Willebadessen im Rahmen eines Wochenseminars der Philosophisch-Politischen Akademie statt, bei dem insgesamt vier Gruppen sokratisch arbeiteten. In jeder der ersten fünf Sitzungen wurde 2 _ Stunden gearbeitet, mit einer halben Stunde Pause nach 1 _ Stunden.

Erste Sitzung

Am Abend des Vortages hatte ich bei der Vorstellung des Themas die „Milchmädchenrechnung“ als eine spezielle Methode vorgeführt, unter Zuhilfenahme der Hände das Produkt zweier Zahlen zwischen 5 und 10 zu berechnen. Die Arbeit in dieser Sitzung bestand im wesentlichen aus

- dem genauen Auffassen der Vorgehensweise;
- der Formulierung einer gemeinsamen sprachlichen Beschreibung des Verfahrens;
- der anschließenden Formulierung zweier Fragen, die untersucht werden sollten.

Das Ergebnis sah so aus:

Beispiel: $6 \cdot 8$. Für die erste Zahl nehme ich von einer Hand so viele Finger, wie diese Zahl größer als 5 ist, also einen. Diesen erkläre ich zum Zehner. Die verbleibenden vier Finger der ersten Hand erkläre ich zu Einern. Für die zweite Zahl verfahre ich entsprechend mit der zweiten Hand. Für die erste Hand ergeben sich also: 1 Zehner und 4 Einer; und für die zweite Hand: 3 Zehner und 2 Einer. Ich zähle alle Finger, die Zehner bedeuten, zusammen und erhalte 4 Zehner, also 40. Ich multipliziere nun die Anzahl der übrigen Finger der ersten Hand, die Einer bedeuten, (4) mit der Anzahl der übrigen

Finger der zweiten Hand, die Einer bedeuten, (2) und erhalte 8 Einer, also 8. Und jetzt addiere ich 40 und 8 und erhalte 48.
Die zu untersuchenden Fragen: Führt dieses Verfahren für alle Zahlen zwischen 5 und 10*) zum richtigen Ergebnis? Wenn ja, warum?
*) 5 und 10 sind eingeschlossen.

Zweite Sitzung

Die Gruppenmitglieder hatten inzwischen arbeitsteilig alle Aufgaben gerechnet, so daß für sie von daher die Antwort „Ja" auf die Frage feststand. Das Bemühen, zu verstehen, was bei dem Verfahren passiert, begann mit der Beobachtung von Ernst, daß man 6 · 5 bzw. 7 · 5 so zerlegen kann, daß die Anzahl der Summanden „2 · 5" der Anzahl der „Zehnerfinger" der linken Hand entspricht:
$6 \cdot 5 = 4{\cdot}5 + 2{\cdot}5$; $7{\cdot}5 = 3{\cdot}5 + 2{\cdot}5 + 2{\cdot}5$
Dies führte zum Vorschlag, beim Aufschreiben die Reihenfolge des Vorgehens des Milchmädchens zu berücksichtigen:
$6 \cdot 5 = 1 \cdot (2{\cdot}5) + 4 \cdot 5$;
auf einen anderen Fall übertragen:
$7 \cdot 6 = 2 \cdot (2{\cdot}5) + 1 \cdot (2{\cdot}5) + 3 \cdot 4$.
Daran knüpfte sich ein weiterer Änderungsvorschlag: Die Zehner auch als 10 schreiben – und nicht als 2 · 5 und statt „3" und „4" etwas schreiben, was ihre Herkunft deutlich macht. Das führte zu $7 \cdot 6 = 2 \cdot 10 + 1 \cdot 10 + (5\text{-}2) \cdot (5\text{-}1)$.
Auch „2" und „1" sollten nun durch Ausdrücke ersetzt werden, die deren Herkunft deutlicher machen, also „2" durch „7 – 5" und „1" durch „6 – 5", und so entstand am Ende die Gleichung:
$$7 \cdot 6 = (7\text{-}5) \cdot 10 + (6\text{-}5) \cdot 10 + (5\text{-}(7\text{-}5)) \cdot (5\text{-}(6\text{-}5))$$.
Es wurde festgehalten, daß der Zweck, der zu diesem vorläufigen Ergebnis führte, darin bestand, das Verfahren so aufzuschreiben, daß die Herkunft jeder Zahl, d.h. ihr Zusammenhang mit den Ausgangszahlen, klar wird.

Dritte Sitzung

Als erstes wurden in der zuletzt betrachteten Gleichung die Ausdrücke (5 - (7 - 5)) und (5 - (6 - 5)) ersetzt durch (10 – 7) und (10 – 6):
$$7 \cdot 6 = (7\text{-}5) \cdot 10 + (6\text{-}5) \cdot 10 + (10\text{-}7) \cdot (10\text{-}6)$$
Das Ergebnis der nächsten Arbeitsphase war die Einsicht:
Erhöht man in dieser Gleichung überall die 7 (erster Faktor) um Eins, dann ist zunächst klar, daß sich die linke Seite um den Betrag des zweiten Faktors erhöhen muß; aber man kann auch sehen, daß sich auch die rechte Seite der Gleichung ebenso um den Betrag des zweiten Faktors erhöhen *muß* – und das nicht nur bei 7 · 6, sondern immer.
Anschließend kam folgende Vermutung ins Gespräch:
Man kann statt 10 ebensogut jede andere gerade Zahl nehmen, muß dann aber auch die 5'en durch die Zahlen ersetzen, die halb so groß wie die neue Zahl sind, also bei 8 die 4, bei 6 die 3 etc. Im Beispiel:
$7 \cdot 6 = (7\text{-}4) \cdot 8 + (6\text{-}4) \cdot 8 + (8\text{-}7) \cdot (8\text{-}6)$.
Ernsts Beschreibung des ersten Ausdrucks der rechten Seite dieser Gleichung durch: „Ich bestimmte die Differenz eines Faktors zu einer Zahl und multipliziere das mit dem Doppelten dieser Zahl ..." führt auf folgende Gleichung:
$$x \cdot y = (x - a) \cdot 2a + (y - a) \cdot 2a + (2a - x) \cdot (2a\text{-}y)$$
Ausmultiplizieren ergibt:
$$2ax - 2a^2 + 2ay - 2a^2 + 4a^2 - 2ax - 2ay + x \cdot y$$
Durch Unterstreichen zueinander passender Ausdrücke stellen wir fest, daß am Ende nur noch x · y übrig bleibt. Das veranlaßt Ernst zur Feststellung, daß nun unsere „Warum-Frage" in: „Führt dieses Verfahren für alle Zahlen zwischen 5 und 10 zum richtigen Ergebnis. Wenn ja, warum" beantwortet sei. Meike hingegen meint, daß wir uns lediglich überlegt hätten, *warum die Rechnung stimmt*, nicht aber, warum die einzelnen Schritte nötig waren; das heißt, was zur Einführung gerade dieses Verfahrens geführt hat. Ähnlich äußern sich andere Teilnehmerinnen und es wird deutlich, daß sie als Antwort auf die Warum-Frage mehr erwarten als nur den Nachweis der Richtigkeit der Rechnung durch eine Gleichung.

Vierte Sitzung

Obwohl man von einem bestimmten Standpunkt aus – was sich ja auch in Ernsts Äußerung gezeigt hat – der Meinung sein könnte, man sei jetzt fertig, hat die Gruppe keineswegs dieses Gefühl. Da die zuletzt durchgeführte Umformung (Ausmultiplizieren) von Teilnehmern kam, die mit so etwas vertraut waren, die anderen (und das war die Mehrheit) aber einsehen wollten, warum die einzelnen Schritte gerechtfertigt sind, wurden zunächst an folgender spezieller Gleichung alle einzelnen Schritte begründet, die von
$(7–5) \cdot 10 + (6\text{-}5) \cdot 10 + (10–7) \cdot (10\text{-}6)$
zu
$7 \cdot 10 – 5 \cdot 10 + 6 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 10 + 10 \cdot 10 – 10 \cdot 6 – 7 \cdot 10 + 7 \cdot 6$
führen.
Als nächstes wird an der Frage gearbeitet: Haben wir durch die Einsicht, daß die Gleichung
$$x \cdot y = (x\text{-}a) \cdot 2a + (y\text{-}a) \cdot 2a + (2a\text{-}x) \cdot (2a\text{-}y)$$
richtig ist, etwas erreicht und wenn ja, was?
Hierzu behauptet Manfred zunächst (sinngemäß) das folgende:
Die Gleichung
(I) $x \cdot y = (x\text{-}5) \cdot 10 + (y\text{-}5) \cdot 10 + (10\text{-}x) \cdot (10\text{-}y)$
ist eine korrekte Darstellung der Milchmädchenvorschrift. Daß sie stimmt, haben wir 1) durch Ausprobieren aller Aufgaben sowie 2) durch das Verfahren der Erhöhung eines Faktors bewiesen. Über diese Behauptung herrscht am Ende der Sitzung keine Einigkeit.

Fünfte Sitzung

Als erstes wird gemeinsam eine Begründungskette aufgebaut, die die Richtigkeit von Manfreds Behauptungen erweist. Zusätzlich werden folgende Einsichten festgehalten:
„Die Gleichung (I) gilt auch dann, wenn x und y durch beliebige andere natürliche Zahlen ersetzt werden."
„Die Milchmädchenrechnung ist gültig, weil sie die praktische Anwendung (Hinweis auf die Finger) eines theoretischen Verfahrens (Hinweis auf die Gleichung) ist, das für alle natürlichen Zahlen gilt."
Im weiteren Verlauf des Gespräches tritt dann noch folgendes zutage: Meike und Laura halten einen besonderen Beweis der Gleichung
(II) $x \cdot y = (x\text{-}a) + (y\text{-}a) \cdot 2a + (2a\text{-}x) \cdot (2a\text{-}y)$

(z.B. durch Umformen, wie es geschehen ist) für überflüssig, da sie ja entstanden ist durch Ersetzen von 5 durch a in einer Gleichung (Gleichung (I)), die wir als richtig erkannt haben.

Sechste Sitzung

Wir arbeiten nur noch während der ersten Stunde am Thema:
Manfred präsentiert ein Paar von Gleichungen:

$$(x-y) \cdot (x-y) = (x-y+10) \cdot (x-y-10) + 100 \quad (1^*)$$

$$(x-y) \cdot (x-y) = (x-y+a) \cdot (x-y-a) + 10a \quad (II^*)$$

für das gilt : (I*) ist richtig, (II*) geht aus (I*) dadurch hervor, daß 10 durch a und 100 durch 10a ersetzt wird. Auch hier ist Meike der Auffassung, daß (II*) richtig sein muß, wenn (I*) richtig ist. Im Gespräch wird erarbeitet, daß dies nicht der Fall ist. An dieser Stelle beenden wir die inhaltliche Arbeit. Die letzte Stunde wird benutzt, Bilanz zu ziehen. Aus den Äußerungen der Teilnehmer/innen wird einerseits sichtbar, welchen persönlichen Gewinn sie für sich aus der Arbeit gezogen haben:

Susanne: „In der Schule habe ich immer nur gelernt, für ein Problem eine Gleichung zu machen und aufzulösen. Hier war ich gar nicht in der Nähe davon. Hätte ich das hier auch gemacht, dann wär' ich nach 'ner Stunde fertig gewesen und hätte all' die vielen interessanten Wege, die wir gegangen sind, nicht gesehen. Das war doch spannender, erst mal ganz andere Dinge zu machen, diese ganzen Aspekte zu sehen. In der Schule wird man nur drauf dressiert, Gleichungen aufzustellen."

Andererseits wird auch deutlich, daß für einige das bisher Erarbeitete eine vollständige Antwort darauf ist, was sie als Antwort auf die „Warum?"-Frage erwartet haben, für andere aber nicht.

Ilse: „Mir geht es wie Artur. Ich habe die Frage umformuliert in: „Woran liegt es?" und dann ist die mathematische Antwort befriedigend. Aber die „Warum"-Frage ist umfassender, z.B.: Wie Menschen auf die Idee kommen, so zu rechnen (als psychisches Phänomen). Das steckt doch auch noch in der „Warum"-Frage drin. Das ist doch verblüffend mit diesen Händen. Aber für mich ist die Tür schon mehr auf, weil ich da was sehe in unserer Lösung."

Anmerkungen

1) Einzelheiten über den organisatorischen Rahmen vgl. Abschnitt 4
2) Zitate alle aus [5]
3) Und selbst hinsichtlich dieser Ziele ist der Erfolg „im großen betrachtet – ein negativer", man denke z.B. an die Fertigkeiten von Abiturienten in bürgerlichen Rechnungsarten wie z.B. Prozentrechnung oder an die Ergebnisse der Tests mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten von Studienanfängern.
4) Das bedeutet natürlich nicht, daß die Anwendung der sokratischen Methode in jedwedem schulischen Unterricht unmöglich wäre. Dies zeigt u.a. die Praxis Gustav Heckmanns in dem von Nelson gegründeten Landerziehungsheim Walkemühle, Rudolf Küchemanns (vgl. [4]) und – in den vergangenen Jahren – Rainer Loskas (Universität Erlangen-Nürnberg), der mit Hauptschülern sokratische Gespräche über Mathematik führte.
5) Die Philosophisch-Politische Akademie wurde 1922 von Leonard Nelson gegründet, war während der Zeit des Nationalsozialismus verboten und wurde nach dem Kriege wieder gegründet.
6) Zu einem solchen Seminar finden sich etwa 40 Telnehmer ein, die in vier verschiedenen Gruppen eine Woche lang jeweils über ein Thema ein sokratisches Gespräch führen. (vgl. [3]) Kontaktadresse für Interessenten an einer Teilnahme an einem solchen Seminar: Dr. D. Krohn, An den Papenstücken 21, 3000 Hannover 91.
7) Dies führt dazu, daß die Gruppengröße in der Regel zwischen 4 und 9 Teilnehmern liegt.

Literatur

[1] **Draken, K.:** Schulunterricht und das sokratische Gespräch nach Leonard Nelson und Gustav Heckmann. In: Zeitschrift für Didaktik der Philosophie 10 (1989) Heft 1, S. 46-49
[2] **Heckmann, G.:** Das sokratische Gespräch. Erfahrungen in philosophischen Hochschulseminaren. Hannover, Schroedel, 1981
[3] **Heckmann, G. u. Krohn, D.:** Über Sokratisches Gespräch und Sokratische Arbeitswochen. In: Zeitschrift für Didaktik der Philosophie 10 (1989) Heft 1, S. 38-43
[4] **Küchemann, R.:** Erfahrungen an einer Oberrealschule. In: Die Durchführung des Arbeitsschulprinzips im mathematischen Unterricht. Beiheft 16 der Beihefte zur Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Leipzig/Berlin, Teubner, 1931
[5] **Nelson, L.:** Die sokratische Methode. Kassel-Bettenhausen, Weber, Zucht u. Co. Versandbuchhandel, 1987
Weitere Abdrucke:
In: Leonard Nelson: Gesammelte Schriften, Bd. 1, Hamburg, Felix Meiner, 1970, Seite 290ff.
In: Henry-Hermann, G. (Hrsg.) Leonard Nelson, Vom Selbstvertrauen der Vernunft. Hamburg, Felix Meiner, 1975, S. 199-238
[6] **Spiegel, H.:** Inwiefern kann die Teilnahme an sokratischen Gesprächen über mathematische Themen für Mathematiklehrerstudenten aller Schulstufen bedeutsam sein.
In: Heinen – Tendrich, J., Horster, D., Krohn, D. (Hrsg.): Das sokratische Gespräch – philosophisch, pädagogisch, politisch. Hamburg, Junius, 1989 (im Druck)